

THE PROBLEM OF TORSION OF A NON-CIRCULAR ROD

Mamadiyor Egamberdievich Sattorov

(Master's student of Samarkand State University)

Согласно теории кручения цилиндрических стержней с произвольной формой сечения, сдвиговые напряжения, возникающие в теле в результате действия крутящего момента T относительно оси z , могут быть вычислены в произвольной точке тела по формулам

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1)$$

где φ —функция напряжений. Дифференциальное уравнение для этой функции имеет вид

$$\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\theta = 0, \quad (2)$$

$$\text{а граничное условие записывается как} \quad \varphi = 0 \quad (3)$$

В уравнение (2) как параметры входят модуль сдвига материала G [Н/см²] и крутка (угол закручивания на единицу длины) θ [рад/см]. При такой постановке задачи дифференциальное уравнение не содержит приложенного крутящего момента T [Н·см]. Величина T вычисляется после решения уравнения (2) по формуле

$$T = 2 \int_{\Sigma} \varphi dA. \quad (4)$$

Функцию напряжений можно наглядно представить как некоторую поверхность, охватывающую поперечное сечение стержня. Крутящий момент пропорционален объему, охватываемому этой поверхностью, а сдвиговые напряжения связаны с углами наклона касательных к этой поверхности в плоскостях xz и yz .

Вариационная формулировка задачи о кручении стержня связана с рассмотрением функционала

$$\chi = \int_V \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta\varphi \right] dV, \quad (5)$$

который может быть записан в виде (см.[1])

$$\chi = \int_V \left[\frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} - (2G\theta)\varphi \right] dV \quad (6)$$

где

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}.$$

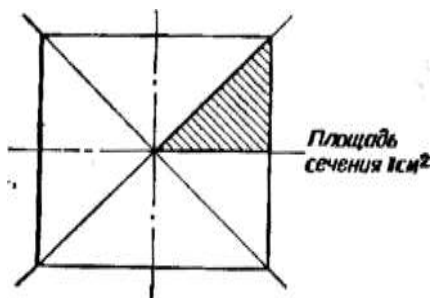
Вектор-столбец $\{g\}$ соответствует сдвиговым напряжениям, матрица $[D]$ становится единичной, так как $K_{xx} = K_{yy} = 1$. Минимизация χ по $\{\Phi\}$ приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \{\Phi\} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T (2G\theta) dV, \quad (7)$$

где $[N^{(e)}]$ функция формы в элементе (е), а $[B^{(e)}]$ —матрица градиентов.

Чтобы показать, как определяются матрицы элементов и каким образом с их помощью формируется система линейных уравнений, рассмотрим стержень с поперечным сечением в форме квадрата (фиг. 1,а). В связи с наличием четырех осей симметрии можно рассматривать только $\frac{1}{8}$ квадрата. Разобьем эту часть сечения на четыре элемента, как показано на фиг. 1,б. Четырех

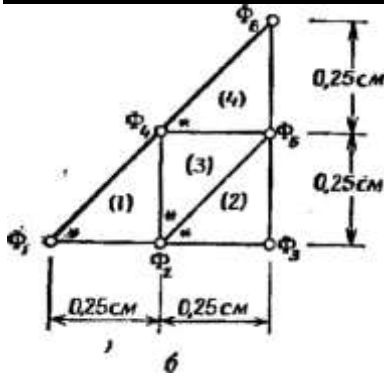
Оси симметрии



$$G = 0,8 \times 10^7 \text{ Н / см}^2$$

$$\theta = 1^* \text{ на } 100 \text{ см}$$

a



Фиг.1. Разбиение области на элементы в задаче о кручении стержня квадратного сечения.

элементов мало для получения приемлемой точности решения, но вполне достаточно для иллюстрации техники получения необходимой системы уравнений, что является нашей целью.

Согласно методам техники включения элемента в область представим интерполяционные полиномы для элементов в виде

$$\varphi^{(1)} = N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6,$$

$$\varphi^{(2)} = 0\Phi_1 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + 0\Phi_4 + N_5^{(2)}\Phi_5 + 0\Phi_6,$$

$$\varphi^{(3)} = 0\Phi_1 + N_2^{(3)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 + N_5^{(3)}\Phi_5 + 0\Phi_6, \quad (8)$$

$$\varphi^{(4)} = 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6.$$

Общая формула для матрицы жесткости элемента записывается как

$$[k^e] = \int_V [B^{(e)}]^T [B^{(e)}] dV.$$

Здесь учтено, что $[D] = [I]$ в рассматриваемом случае. Для определения $[B^{(e)}]$ необходимо дифференцировать $[\varphi^{(e)}]$ по x и y . Рассмотрим подробно первый элемент:

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4^{(1)}}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^{(1)}} [b_1^{(1)} \quad b_2^{(1)} \quad 0 \quad b_4^{(1)} \quad 0 \quad 0], \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4^{(1)}}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^{(1)}} [c_1^{(1)} \quad c_2^{(1)} \quad 0 \quad c_4^{(1)} \quad 0 \quad 0], \quad (9b)$$

Матрица градиентов $[B^{(1)}]$ имеет вид

$$[B^{(1)}] = \frac{1}{2A^{(1)}} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & 0 & b_4^{(1)} & 0 & 0 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & 0 & c_4^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Площадь этого элемента

$$A^{(1)} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} \text{ и } \frac{1}{2A^{(1)}} = 16.$$

Коэффициенты b и c равны

$$b_1^{(1)} = Y_2 - Y_4 = -0,25, \quad c_1^{(1)} = X_0 - X_4 = 0,$$

$$b_2^{(1)} = Y_4 - Y_1 = 0,25, \quad c_2^{(1)} = X_1 - X_4 = -0,25,$$

$$b_4^{(1)} = Y_1 - Y_2 = 0, \quad c_4^{(1)} = X_2 - X_1 = 0,25.$$

Подставляя эти значения в формулу (10), получаем

$$[B^{(1)}] = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Матрица жесткости элемента представляет собой интеграл от произведения $[B^{(1)}]^T [B^{(1)}]$. Так как произведение матриц $[B^{(1)}]^T [B^{(1)}]$ является постоянной величиной, оно может быть вынесено из-под интеграла, что дает

$$[k^{(1)}] = [B^{(1)}]^T [B^{(1)}] \int_{V^{(1)}} dV = [B^{(1)}]^T [B^{(1)}] A^{(1)}.$$

Толщина элемента предполагается при этом единичной. Воспользовавшись значением $[B^{(1)}]^T [B^{(1)}]$ и тем, что $A^{(1)} = 1/32$, получаем значение матрицы $[k^{(1)}]$

Объемный интеграл

$$\{f^{(1)}\} = \int_{V^{(1)}} 2G^{(1)} \theta [N^{(1)}]^T dV$$

вычисляется просто, если воспользоваться системой L -координат:

$$L_1 = N_1^{(1)}, \quad L_2 = N_2^{(1)}, \quad L_3 = N_4^{(1)} \quad (12)$$

и подстановкой значений $G^{(1)}$, θ и $A^{(1)}$, которая дает

$$\{f^{(1)}\} = \{29,07 \quad 29,07 \quad 0 \quad 29,07 \quad 0 \quad 0\}^T. \quad (13)$$

Таким образом, система уравнений для первого элемента вычислена.

$$[k^{(1)}]\{\Phi\} = \{f^{(1)}\}$$

Аналогично можно получить систему уравнений для любого другого элемента.

Окончательная полная система уравнений получается алгебраическим суммированием уравнений для отдельных элементов. Она имеет вид

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,07 \\ 87,22 \\ 29,07 \\ 87,22 \\ 87,22 \\ 29,07 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Величины Φ_3 , Φ_5 и Φ_6 равны нулю, так как соответствующие им узлы расположены на внешней границе. Преобразуя систему уравнений (14) и решая ее, получаем

$$\Phi_1 = 218,16, \quad \Phi_2 = 160, \quad \Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = 123,63, \quad \Phi_5 = 0, \quad \Phi_6 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА.

1. Л. Сегерлинд. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979.
2. Л. А. Розин. Основы метода конечных элементов в теории упругости. Л.; изд-во ЛПИ, 1972