

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО БИКАЛОРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.

О.М. Эгамбердиев
к.ф-м.н, доц. НамИСИ

В статье изучена некорректная задача для абстрактного бикалорического уравнения и дана оценка устойчивости по Тихонову.

Ключевые слова: абстракт, бикалорические, пространства, самосопряженный, линейный, неограниченный, плотный, оператор, теоремы.

Мақолада абстракт бикалорик тенглама учун коррект бўлмаган масала ўрганилган ва Тихонов бўйича турғунлигига баҳо берилган.

Калит сўзлар: абстракт, бикалорик, фазо, ўз-ўзига қўшма, чизиқли, чегараланмаган, зич, оператор, теорема.

Abstract: In article the incorrect task for abstract bicaloric the equation is studied and a stability assessment according to Tikhonov is given.

Keywords: bicaloric, spaces, self-conjugate, linear, unlimited, dense, operator, theorems.

Задача. Требуется найти решение абстрактного бикалорического уравнения

$$K_+^2 u(t) \equiv \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

удовлетворяющего следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} u|_{t=l_1} &= u(l_1) \\ u|_{t=l_2} &= u(l_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $u(t)$ - абстрактная функция со значениями в гильбертовом пространстве H .

A - постоянный, положительно определённый, самосопряженный, линейный, неограниченный с всюду плотной областью определения $D(A^2)$ (DCH) оператор, действующий из H в H , причем $u(l_1), u(l_2) \in H$.

Доказывается справедливость представления.

$$u = u_1 + (t - l_1)u_2.$$

Теорема. Если u_1 и u_2 есть решения калорического уравнения, то функция $u = u_1 + (t - l_1)u_2$ есть решение уравнения (1) и обратно, для каждой заданной абстрактной бикалорической функции u найдутся такие функции u_1 и u_2 что

$$u = u_1 + (t - l_1)u_2$$

Доказательство. 1) Если u_1 и u_2 решения калорического уравнения, то u есть решение бикалорического уравнения

$$K_+ u = K_+ [u_1 + (t - l_1)u_2] = K_+ u_1 + u_2 + (t - l_1) \frac{du_2}{dt} + A(t - l_1)u_2 =$$

$$= u_2 + (t - l_1) \left(\frac{du_2}{dt} + Au_2 \right) = u_2 + (t - l_1) \cdot K_+ u_2 = u_2.$$

Так как

$$\frac{du_2}{dt} + Au_2 = 0, \quad \text{то} \quad K_+ (u_1 + (t - l_1)u_2) = u_2 \quad \text{т-е} \quad K_+ u = u_2.$$

Применяя еще раз оператор K_+ , учитывая, что $K_+ u_2 = K_+ K_+ u = 0$;

2) Если u решение бикалорического уравнения, то найдутся такие калорические функции u_1 , u_2 что $u = u_1 + (t - l_1)u_2$.

Для доказательства этого утверждения, достаточно установить возможность выбора u_2 .

Положим

$$u_2 = K_+ u,$$

$$u_1 = u - (t - l_1)u_2.$$

Остается показать, что

$$K_+ [u - (t - l_1)u_2] = 0.$$

В самом деле:

$$K_+ u_1 = K_+ [u - (t - l_1)u_2] = K_+ u - K_+ (t - l_1)u_2 =$$

$$= K_+ u - u_2 - (t - l_1) \cdot \frac{du_2}{dt} - A \cdot (t - l_1)u_2 =$$

$$= K_+ u - u_2 - (t - l_1) \cdot \left(\frac{du_2}{dt} - Au_2 \right) = K_+ u - u_2 = 0,$$

отсюда

$$K_+ u_1 = 0, \quad K_+ u_2 = 0.$$

Теорема полностью доказана.

С помощью представления

$$u = u_1 + (t - l_1)u_2 \quad (3)$$

Решение задачи (1) – (2) можно свести к решению следующих задач:

$$\begin{cases} K_+ u_1 = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1|_{t=l_1} = u(l_1) & (5) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} K_+ u_2 = 0, & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2|_{t=l_2} = u_2(l_2) & (7) \end{cases}$$

$$\text{где} \quad u_2(l_2) = \frac{u(l_1)}{l_2 - l_1} - \frac{u_1(l_2)}{l_2 - l_1}, \quad u_1(l_2) = \|u(0)\|_{l_1}^{\frac{l_1 - l_2}{l_1}} \|u(l_1)\|_{l_1}^{\frac{l_2}{l_1}}$$

задача (4) – (5) $0 < t < l_1$ некорректно в классическом смысле, а $l_1 < t < T$ корректно.

Задача (4) – (5) будем исследовать на условную корректность по Тихонову [1]

Теорема. Для любого решения задачи (4) – (5) справедливо неравенство.

$$\|u_1(t)\| \leq \|u(0)\|^{\frac{l_1-t}{l_1}} \cdot \|u(l_1)\|^{\frac{t}{l_1}}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию [1]

$$\varphi(t) = \|u_1(t)\|^2 = (u_1, u_1).$$

Дифференцируя ее, получим

$$\varphi'(t) = 2(u_1', u_1) = 2(Au_1, u_1)$$

$$\varphi''(t) = 2(u_1', u_1') + 2(u_1, u_1'') = 2(Au_1, Au_1) + 2(u_1, A^2 u_1).$$

Так как оператор самосопряженный (*m.e.* $A = A^*$), то $(u_1, A^2 u_1) = (Au_1, Au_1)$ и, значит, $\varphi''(t) = 4(Au_1, Au_1)$.

Теперь рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \ln \varphi(t)$$

Дифференцируя ее, имеем

$$\psi''(t) = \frac{1}{\varphi^2(t)} [\varphi''(t) \cdot \varphi'(t)] = \frac{4}{\varphi^2(t)} [(Au_1, Au_1)(u_1, u_1) - (Au_1, u_1)^2] \geq 0 \quad (8)$$

В силу известного неравенства Буняковского неравенство (8) означает, что функция $\psi(t)$ обращена вогнутостью вверх, откуда вытекает, что функция $\psi(t)$ на отрезке $[0, l_1]$ не превосходит линейной функции, принимающей на концах отрезка те же значения, что и $\psi(t)$. Из (8) следует

$$\psi(t) \leq \frac{l_1-t}{l_1} \psi(0) + \frac{t}{l_1} \psi(l_1) \quad (9)$$

Потенцируя неравенство (9), получим

$$\varphi(t) \leq [\varphi(0)]^{\frac{l_1-t}{l_1}} \cdot [\varphi(l_1)]^{\frac{t}{l_1}},$$

$$\text{Откуда } \|u_1(t)\| \leq \|u(0)\|^{\frac{l_1-t}{l_1}} \cdot \|u(l_1)\|^{\frac{t}{l_1}}$$

Задача (6) – (7) $0 < t < l_2$ некорректно, а $l_2 < t < T$ в классическом смысле корректна, аналогично как задача (4) – (5) её можно исследовать на условную корректность по Тихонову [1]

Докажем теорему, характеризующую оценку устойчивости решения задачи (1) – (2)

Теорема. Для любого решения задачи (1) – (2) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H &\leq \|u(0)\|_{l_1}^{\frac{l_1-t}{l_1}} \|u(l_1)\|_{l_1}^{\frac{t}{l_1}} + \\ &+ (t-l_1) \left\{ \frac{1}{l_2-l_1} \left(\|u(l_2)\| + \|u(0)\|_{l_1}^{\frac{l_1-l_2}{l_1}} \|u(l_1)\|_{l_1}^{\frac{l_2}{l_1}} \right)^{\frac{t}{l_2}} \cdot \|u(l_1)\|_{l_1}^{\frac{t-l_1}{l_1}}, \quad l_1 < t < l_2 \right. \\ &\left. \frac{1}{T-l_1} \left(\|u(T)\| + \|u(0)\|_{l_1}^{\frac{l_1-T}{l_1}} \|u(l_1)\|_{l_1}^{\frac{T}{l_1}} \right)^{\frac{T-t}{T}} \cdot \|u(l_2)\|_{l_2}^{\frac{t}{l_2}}, \quad l_2 \leq t \leq T \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что из неравенства (10) следует единственность решения задачи (1) – (2) и условная корректность этой задачи в классе

$$\{u : \|u(0)\| \leq M\}$$

Эта теорема доказывается методом логарифмической выпуклости [1]

Литература.

1. Лаврентьев М.М. *Некорректные задачи для дифференциальных уравнений*.
2. Новосибирск: Изд-ва НГУ, 1981, 71 с.
3. Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск. 2009 г.
4. Эгамбердиев О.М. *Задача Коши для абстрактного поликалорического уравнения*. ДАН РУз. № 6. 2011, с. 18-20.
5. Атахаджаев М.А., Эгамбердиев О.М. *Задача Коши для абстрактного бикалорического уравнения*. Сибирский математический журнал. Т.31, № 4, 1990.