

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Х.А.Рахимова ,

С.А. Акбаров (студент)

Наманганский инженерно-строительный институт,

Наманганский инженерно-строительный институт,

г. Наманган, Узбекистан

E-mail: hadichaxonrahimova@gmail.com

saydulloxonakbarxonov@gmail.com

Аннотация: В работе изучается краевая задача типа задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе четвертого порядка в прямоугольной области, стороны которого имеют целочисленные измерения. Показана, что рассматривая задачу в общем случае не разрешима методом разделения переменных.

Ключевые слова: Уравнение Лаврентьева-Бицадзе четвертого порядка, задача Дирихле, метод Фурье, некорректность

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu \equiv D_x^4 u(x, y) + (\operatorname{sgn} y) D_y^4 u(x, y) = 0, \quad (1)$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 3, -1 < y < 1\}$. Пусть

$\Omega_+ = \Omega \cap (y > 0), \Omega_- = \Omega \cap (y < 0)$. Изучим для этого уравнения следующую краевую задачу.

Задача D. Найти в области Ω функцию $u(x, y)$ удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^3(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega_+ \cup \Omega_-), \quad Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$u(0, y) = u(3, y) = u'(0, y) = u'(3, y) = 0, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

$$u(x, -1) = \varphi_0(x), \quad 0 \leq x \leq 3, \quad u'(x, -1) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 3,$$

где $s = 0, 1$, $\varphi_s(x), \psi_s(x)$ - заданные достаточно гладкие функции и выполняются естественные условия согласования.

Уравнение (1) является малоизученным. Уравнение второго порядка типа (1) - есть известное уравнение Лаврентьева-Бицадзе, для которого некорректность задачи Дирихле было показано А.В.Бицадзе [1]. После этого специалистами, различными методами, были найдены условия единственности решения задачи Дирихле, как для уравнений 2-го порядка смешанного типа, так и для уравнений высокого порядка с гладкими коэффициентами, например в работах [2]-[4].

Перейдем к исследованию поставленной задачи. Решение будем искать методом Фурье, тогда решение задачи D представится в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin \frac{\pi k}{3} x,$$

где $u_k(y)$ есть решение следующей задачи :

$$\begin{cases} u_k^{(4)}(y) + (\operatorname{sgn} y) \left(\frac{\pi k}{3} \right)^4 u_k(y) = 0, \\ u_k(-1) = \varphi_{0k}, u'_k(-1) = \varphi_{1k}, \\ u_k(1) = \psi_{0k}, u'_k(1) = \psi_{1k}, \\ u_k(-0) = u_k(+0), u'_k(-0) = u'_k(+0), \\ u''_k(-0) = u''_k(+0), u'''_k(-0) = u'''_k(+0), \end{cases} \quad (2)$$

здесь

$$\varphi_{ik} = \frac{2}{3} \int_0^3 \varphi_i \sin \frac{\pi k}{3} x dx, i = 0, 1, \psi_{ik} = \frac{2}{3} \int_0^3 \psi_i \sin \frac{\pi k}{3} x dx, i = 0, 1.$$

Найдем сначала общее решение уравнения (2).

$$u_k(y) = e^{a_k y} (c_1 \cos a_k y + c_2 \sin a_k y) + e^{-a_k y} (c_3 \cos a_k y + c_4 \sin a_k y), (y > 0),$$

$$a_k = \frac{\pi k}{3} \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$u_k(y) = d_1 e^{\frac{\pi k}{3} y} + d_2 \cos \left(\frac{\pi k}{3} y \right) + d_3 \sin \left(\frac{\pi k}{3} y \right) + d_4 e^{-\frac{\pi k}{3} y}, (y < 0).$$

Учитывая условия задачи 2, для нахождения неизвестных величин $c_1, \dots, c_4, d_1, \dots, d_4$ получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} e^{a_k} [c_1 \cos a_k + c_2 \sin a_k] + e^{-a_k} [c_3 \cos a_k + c_4 \sin a_k] = \psi_{0k} = A, \\ e^{a_k} \left[c_1 \cos \left(a_k + \frac{\pi}{4} \right) + c_2 \sin \left(a_k + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \\ + e^{-a_k} \left[c_3 \cos \left(a_k + \frac{3\pi}{4} \right) + c_4 \sin \left(a_k + \frac{3\pi}{4} \right) \right] = \frac{\psi_{1k}}{a_k} = B, \\ d_1 e^{\frac{\pi k}{3}} + d_2 \cos \frac{\pi k}{3} - d_3 \sin \frac{\pi k}{3} + d_4 e^{\frac{\pi k}{3}} = \varphi_{0k} = C, \\ d_1 e^{-\frac{\pi k}{3}} + d_2 \cos \frac{\pi k}{3} + d_3 \sin \frac{\pi k}{3} - d_4 e^{\frac{\pi k}{3}} = \frac{3}{\pi k} \varphi_{1k} = D, \\ c_1 + c_3 - d_1 - d_2 - d_4 = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} c_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_4 - d_1 - d_3 + d_4 = 0, \\ c_2 - c_4 - d_1 + d_2 - d_4 = 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} c_4 - d_1 + d_3 + d_4 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Основной определитель Δ , систем (3) вычислим в программе Wolfram Mathematica

$$\begin{aligned} \Delta = & -2e^{-2a_k} \left(2e^{4a_k} - 4e^{2a_k} \sin^2 a_k + 2 \right) - \\ & -2e^{-2a_k - \frac{\pi k}{3}} \left(-2e^{2a_k} \cos \frac{\pi k}{3} \left(\sqrt{2} \left(e^{\frac{2\pi k}{3}} - 1 \right) \sin 2a_k + e^{\frac{2\pi k}{3}} + 1 \right) \right) - \\ & -2e^{-2a_k - \frac{\pi k}{3}} \sin \left(\frac{\pi k}{3} \right) \left(e^{4a_k} (\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2} - 1 \right) - 2e^{-2a_k + \frac{\pi k}{3}} \sin \left(\frac{\pi k}{3} \right) \left(e^{4a_k} - \sqrt{2} + 1 \right) - \\ & -2 \sin \frac{\pi k}{3} \left(2e^{\frac{\pi k}{3}} \sin^2 a_k - 2 \sin^2 a_k + \sqrt{2} e^{2a_k + \frac{\pi k}{3}} \right) - \\ & -2e^{-2a_k - \frac{\pi k}{3}} \left(-2e^{2a_k} \cos^2 a_k \left(\left(e^{\frac{2\pi k}{3}} - 1 \right) \sin \frac{\pi k}{3} - 2e^{\frac{\pi k}{3}} \right) \right), \end{aligned}$$

значит

$$\Delta = O \left(e^{2a_k + \frac{\pi k}{3}} \sin \frac{\pi k}{3} \right),$$

вычисления показывают, что

$$d_3 = \frac{O \left((C + D)(1 + \sqrt{2}) e^{2a_k + \frac{\pi k}{3}} \right)}{\Delta} \Rightarrow \lim_{k=3l \rightarrow \infty} d_3 = \infty.$$

Значит задача 1 вообще говоря не разрешима методом Фурье.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122. №2. С. 167-170.
2. Cannon J. R. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1963. – Т. 61. – №. 1. – С. 371-377.
3. Нахушев А.М. Критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. 1970. Т.6. №1. С.190-191.
4. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными // Киев, Наукова Думка, 1984, - С.264.